

ALGEBRA I

Kesätentti 9.8.2010, K. Myllylä

Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.
Perustele tehtävät riittävästi.

- a) Määrää lukujen 1110 ja 526 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmin avulla.
b) Ratkaise yhtälö $7x \equiv 5(31)$ Eukleideen algoritmin avulla.

- a) Määrää ryhmän (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) kaikki normaalit aliryhmät.
b) Mitkä ryhmän (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) aliryhmistä ovat syklisiä?
c) Olkoon $H = \{[1], [5]\}$. Esitä tekijäryhmän \mathbb{Z}_8^*/H ryhmätaulu.

3. Olkoon G ryhmä, $N \trianglelefteq G$ ja kuvaus

$$f : G \rightarrow G/N, f(a) = aN.$$

Osoita, että kuvaus f on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on N .

4. Määrää kunnan $GF(4)$ ryhmätaulut molempien operaatioiden suhteen.
Perustele riittävästi.

5. Olkoon K kunta ja $f(x) \in K[x]$ sekä $\alpha \in K$. Osoita, että

$$f(\alpha) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x - \alpha) \mid f(x).$$