

ALGEBRA I

Loppukoe 18.10.2010, K. Myllylä

**Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.
Perustelee tehtävät riittävästi.**

- Määrää lukujen 264 ja 96 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmin avulla.
 - Ratkaise yhtälö $6x \equiv 15(24)$ Eukleideen algoritmin avulla.
- Määrää ryhmän (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) kaikki normaalit aliryhmät.
 - Mitkä ryhmän (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) aliryhmistä ovat syklisiä?
 - Olkoon $H = \{[1], [5]\}$. Esitä tekijäryhmän \mathbb{Z}_8^*/H ryhmätaulu.
- Olkoon $H = \{[0], [2], [4]\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Osoita, että $(H, +, \cdot)$ on rengas. Onko H renkaan \mathbb{Z}_6 alirengas?
- Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $b > 0$. Osoita, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut q ja r , että $a = qb + r$, missä $0 \leq r < b$.
(Lukujen q ja r yksikäsitteisyyttä ei tarvitse osoittaa.)
- Olkoon (G, \cdot) ryhmä ja $N \leq G$. Osoita, että $N \trianglelefteq G$ jos seuraava ehto toteutuu:

$$aN a^{-1} \subseteq N \text{ aina, kun } a \in G.$$