ALGEBRA I

Loppukoe 21.2.2011, K. Myllylä

1. a) Määrää lukujen 264 ja 96 suurin yhteinen tekijä. Etsi lisäksi sellaiset kokonaisluvut x ja y, että
$$\mathrm{syt}(264, 96) = 264x + 96y.$$
   b) Ratkaise kongruenssi
$$6x \equiv 15\ (24).$$

2. a) Esitä polynomi
$$f(x) = [1]x^3 + [2]x + [1]$$
   jaottomien polynomien tulona polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$.
   b) Esitä yksi ryhmän $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ ei-triviaaleista normaaleista aliryhmistä. Laadi ryhmätaulu ryhmälle $\mathbb{Z}_9^*/N$, missä N on löytämäsi normaali aliryhmä.

3. a) Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja $f(x), g(x) \in K[x]$. Olkoon lisäksi $g(x) \neq \mathbf{0}$. Osoita, että on olemassa sellaiset polynomit $q(x), r(x) \in K[x]$, että $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$.
   b) Millaisia ryhmähomomorfismeja voidaan laatia ryhmältä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ ryhmälle $(\mathbb{Z}_5, +)$?

4. a) Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja H ryhmän G aliryhmä, eli $H \leq G$. Oletetaan, että aliryhmän H vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä ryhmässä G on 2, eli $|G|/|H| = 2$. Tällöin myös aliryhmän H oikeanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä ryhmässä G on 2. Osoita, että H on ryhmän G normaali aliryhmä, eli $H \trianglelefteq G$.
   b) Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja $M \subseteq G$ sen osajoukko. Joukon M sentralisoija ryhmässä G on joukko
$$C_G(M) = \{g \in G \mid gm = mg\ \forall\ m \in M\}.$$
   Osoita, että $C_G(M) \leq G$.

Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.