**ALGEBRA I**

**Loppukoe 23.11.2009, K. Myllylä**

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

1. a) Määrää lukujen 430 ja 252 syt ja esitä se näiden lukujen lineaarikombinaationa.

   b) Ratkaise yhtälö
$$430x \equiv 10(252).$$

2. a) Osoita, että joukko
$$H = \{[1], [7], [9], [15]\}$$
   on ryhmän $(\mathbb{Z}_{16}^{*}, \cdot)$ normaali aliryhmä.

   b) Todista seuraava tulos: Jos ryhmän kertaluku on alkuluku, niin ryhmä on syklinen.

3. a) Määrää kaikki kertalukua 3 olevat kunnat ja anna esimerkki jonkin tällaisen kunnan kerto- ja yhteenlaskutaulusta.

   b) Esitä polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomi
$$f(x) = [1]x^3 + [2]x + [1]$$
   jaottomien polynomien tulona.

4. a) Olkoon $f : G \to H$ homomorfismi ja olkoot $e_G$ ja $e_H$ ryhmien $G$ ja $H$ neutraalialkiot. Osoita, että tällöin
$$f(e_G) = e_H \quad \text{ja} \quad f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$
   aina, kun $a \in G$.

   b) Kuvaus $f : (\mathbb{Z}_{32}^{*}, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{32}^{*}, \cdot)$, $f(a) = a^2$ on ryhmähomomorfismi. Osoita, että
$$(\mathbb{Z}_{32}^{*}/\mathrm{Ker} f, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +).$$

**Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.**
**Perustele tehtävät riittävästi.**