ALGEBRA II

Loppukoe 4.5.2009

1. Osoita, että $p(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$ on jaoton. Merkitse $\alpha = x + (p(x))$ ja konstruoi laajennus $E = \mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$. Onko α primitiivinen alkio kunnassa E?

2. Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_5. Vastaa (perustelujen kanssa) seuraaviin kysymyksiin:
   a) Kuinka monta 4-sykliä ryhmässä S_5 on?
   b) Kuinka monta kertalukua kaksi olevaa alkiota ryhmässä S_5 on?
   c) Olkoon $\alpha = (3\ 4\ 5)$. Määrää $C_{S_5}(\alpha)$.

3. Ratkaise Cardanon kaavan avulla yhtälö
$$x^3 - 9x + 28 = 0.$$

4. Jos K on kunta, niin $K[x]$ on pääideaalirengas (siis jokainen ideaali on pääideaali). Todista: Jos $p(x)$ on renkaan $K[x]$ jaoton polynomi, niin $(p(x))$ on renkaan $K[x]$ maksimaalinen ideaali.

5. Olkoon $G \leq S_n$ ja $\alpha \in G$. Oletetaan lisäksi, että α on pariton permutaatio. Osoita, että permutaatioryhmässä G on yhtä monta parillista ja paritonta permutaatiota.