ALGEBRA II

Loppukoe 17.5.2010

1. Osoita, että $p(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$ on jaoton. Merkitse $\alpha = x + (p(x))$ ja konstruoi laajennus $E = \mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$.
   Osoita, että α on primitiivinen alkio kunnassa E.

2. Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_5. Vastaa (perustelujen kanssa) seuraaviin kysymyksiin:
   a) Kuinka monta 4-sykliä ryhmässä S_5 on?
   b) Kuinka monta kertalukua kaksi olevaa alkiota ryhmässä S_5 on?
   c) Olkoon $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_5$. Määrää $C_{S_5}(\alpha)$.

3. a) Ratkaise Cardanon kaavan avulla yhtälö

$$x^3 + 6x + 2 = 0.$$

   b) Osoita Eisensteinin kriteerin (ja sopivan sijoituksen) avulla, että $f(x) = x^2 + x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ on jaoton.

4. Todista: Jos p on alkuluku ja $n \geq 1$, niin on olemassa sellainen kunta, jonka kertaluku $= p^n$.

5. Olkoon N alternoivan ryhmän A_n ($n \geq 3$) normaali aliryhmä. Tiedetään, että N sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $N = A_n$.