Algebra III

1. välikoe 18.10.2004

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. a) Olkoon M R-moduli, $r \in R$ ja $\mu_r(m) = rm$ aina, kun $m \in M$. Osoita, että rM on M:n alimoduli ja $\mu_r : M \to M$ on R-kuvaus.

   b) Olkoon $f : M \to N$ R-kuvaus. Osoita, että

   $$M/\textsc{Ker} f \cong \textsc{Im} f.$$

2. Oletetaan, että A, B, C ovat R-moduleita ja f, g ovat R-kuvauksia ja olkoon

   $$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

   eksakti jono.

   a) Osoita, että

   $$A \cong \textsc{Im} f \text{ ja } B/\textsc{Im} f \cong C.$$

   b) Olkoon $h : C \to B$ ja $\ell : B \to A$ sellaisia R-kuvauksia, että

   $$\ell f = 1_A \quad \text{ja} \quad gh = 1_C.$$

   Osoita, että

   $$B = \textsc{Ker}\ \ell \oplus \textsc{Ker}\ g.$$

3. Määrittele kategoria ja kontravariantti funktori. Olkoon X annettu joukko ja $\mathcal{D}$ kategoria, missä $OBJ(\mathcal{D}) = \{A | A \subseteq X\}$ ja

   $$HOM(A, B) = \begin{cases} \tau(A, B), & \text{jos } A \subseteq B; \\ \emptyset, \text{ jos } A \nsubseteq B; \end{cases}$$

   aina, kun $A, B \in OBJ(\mathcal{D})$.

   Muodosta kontravariantti funktori $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Perustelut.