Algebra III

2. välikoe 29.11.2004

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. a) Olkoon M vapaa R-moduli, missä R on kokonaisalue.
   Olkoon $r \in R,\ m \in M$ ja $rm = 0$. Näytä, että $r = 0$ tai $m = 0$.

   b) Olkoon K kunta sekä $V = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$ ja $W = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ K-moduleita. Määrää sellaiset vektorit $v_i \in V$ ja $w_i \in W$, että
   $v_1 \otimes w_1 = f_2 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$,
   $v_2 \oplus w_2 = f_1 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$.

2. Olkoon R ei-kommutatiivinen rengas ja A, A' oikeanpuoleisia sekä B, B' vasemmanpuoleisia R-moduleita.

   a) Määrittele tensoritulo $A \otimes_R B$ ja $a \otimes b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$.

   b) Olkoot
   $$f : A_R \to A'_R,\ g :_R B \to_R B'$$
   R-kuvauksia. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{Z}$-kuvaus
   $$F : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B',$$
   jolle pätee
   $$F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$
   aina, kun $a \in A, b \in B$.

3. a) Valitse sellaiset R_i-modulit M_i, että
   $$\mathbb{Q} \otimes_{R_1} \mathbb{Z}^3 \cong M_1^3, \mathbb{R}^2 \otimes_{R_2} \mathbb{C}^2 \cong M_2^4, \mathbb{H} \otimes_{R_3} \mathbb{H} \cong M_3^4,$$
   missä $R_i, M_i \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

   b) Olkoon
   $$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$
   ketjukompleksi, missä $\ell_p = \textsc{Rank} C_p, Z_p = \textsc{Ker} \partial_p, B_p = \textsc{Im} \partial_{p+1}$, $H_p = Z_p / B_p, R_p = \textsc{Rank} H_p$. Osoita, että jono
   $$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \to 0$$
   on eksakti ja, että
   $$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \ell_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p.$$