

Algebra III

Kesätentti 8.8.2005 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

- a) Olkoon M vapaa R -moduli, missä R on kokonaisalue.
Olkoon $r \in R$, $m \in M$ ja $rm = 0$. Näytä, että $r = 0$ tai $m = 0$.
b) Olkoon M R -moduli ja J renkaan R ideaali. Osoita, että JM on alimoduli.

- Oletetaan, että A, B, C ovat R -moduleita ja f, g ovat R -kuvauksia ja olkoon

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eksakti jono. Osoita, että

$$A \cong \text{Im} f \quad \text{ja} \quad B/\text{Im} f \cong C.$$

- Olkoot

$$f : A_R \rightarrow A'_R, \quad g : {}_R B \rightarrow {}_R B'$$

R -kuvauksia. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen \mathbb{Z} -kuvaus

$$F : A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B',$$

jolle pätee

$$F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

aina, kun $a \in A, b \in B$.

- Valitse sellaiset R_i -modulit M_i , että

$$\mathbb{Q} \otimes_{R_1} \mathbb{Z}^3 \cong M_1^3, \quad \mathbb{R}^2 \otimes_{R_2} \mathbb{C}^2 \cong M_2^4, \quad \mathbb{H} \otimes_{R_3} \mathbb{H} \cong M_3^4,$$

missä $R_i, M_i \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

- Olkoon

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

ketjukompleksi, missä $\ell_p = \text{RANK} C_p$, $Z_p = \text{KER} \partial_p$, $B_p = \text{IM} \partial_{p+1}$,
 $H_p = Z_p/B_p$, $R_p = \text{RANK} H_p$. Osoita, että jono

$$0 \rightarrow Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \rightarrow 0$$

on eksakti ja, että

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \ell_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p.$$