Algebra III

Loppukoe 6.11.2006 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Oletetaan, että A, B, C ovat R-moduleita ja f, g ovat R-kuvauksia ja olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eksakti jono. Osoita, että

$$A \cong \mathrm{Im} f \text{ ja } B/\mathrm{Im} f \cong C.$$

2. a) Olkoon M vapaa R-moduli, missä R on kokonaisalue.
   Olkoon $r \in R,\ m \in M$ ja $rm = 0$. Näytä, että $r = 0$ tai $m = 0$.

   b) Olkoon M R-moduli ja J renkaan R ideaali. Osoita, että JM on alimoduli.

3. Olkoot

$$f : A_R \to A'_R,\ g :_R B \to_R B'$$

R-kuvauksia. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{Z}$-kuvaus

$$F : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B',$$

jolle pätee

$$F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

aina, kun $a \in A, b \in B$.

4. Valitse sellaiset R_i-modulit M_i, että

$$\mathbb{Q} \otimes_{R_1} \mathbb{Z}^3 \cong M_1^3, \mathbb{R}^2 \otimes_{R_2} \mathbb{C}^2 \cong M_2^4, \mathbb{H} \otimes_{R_3} \mathbb{H} \cong M_3^4,$$

missä $R_i, M_i \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

5. Olkoon k kunta, $q \in k^*$ ja $P_1(x), \cdots, P_n(x) \in k[x] \setminus \{0\}$.
   Osoita, että

   a) $k(x)$ ja $k((x))$ ovat q-differenssialgebroita.

   b) $k\left[x, \frac{1}{P_1(q^i x)}, \cdots, \frac{1}{P_n(p^i x)} | i \in \mathbb{N}\right]$ on oleellisesti äärellistä tyyppiä oleva q-differenssialgebra.

   c) Määrää q-differenssialgebran $k((x))$ vakioiden rengas.

   d) Olkoon $\{f_1(x), f_2(x)\}$ q-differenssiyhtälön

$$qxF(q^2x) = F(qx) - F(x)$$

ratkaisukanta. Osoita, että

$$k[x, f_1(q^i x), f_2(q^i x) | i = 0, 1]$$

on oleellisesti äärellistä tyyppiä oleva q-differenssialgebra.