Algebra III

Loppukoe 16.3.2009 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Oletetaan, että A, B, C ovat R-moduleita ja f, g ovat R-kuvauksia ja olkoon
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
eksakti jono. Osoita, että
$$A \cong \mathrm{Im} f \text{ ja } B/\mathrm{Im} f \cong C.$$

2. Olkoon M R-moduli ja J renkaan R ideaali. Osoita, että JM on alimoduli.

3. Olkoon K kunta sekä $V = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$ ja $W = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ K- moduleita. Määrää sellaiset vektorit $v_i \in V$ ja $w_i \in W$, että $v_1 \otimes w_1 = f_2 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$, $v_2 \otimes w_2 = f_1 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$.

4. Olkoon R ei-kommutatiivinen rengas ja M vasen R-moduli. Osoita, että
$$R \otimes_R M \cong M.$$

5. Olkoon
$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$
ketjukompleksi, missä $\ell_p = \mathrm{Rank} C_p, Z_p = \mathrm{Ker} \partial_p, B_p = \mathrm{Im} \partial_{p+1}$,
$H_p = Z_p/B_p, R_p = \mathrm{Rank} H_p$. Osoita, että jono
$$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \to 0$$
on eksakti ja, että
$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \ell_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p.$$