Algebra III

Loppukoe 25.2.2008 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Oletetaan, että A, B, C ovat R-moduleita ja f, g ovat R-kuvauksia ja olkoon
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
eksakti jono. Osoita, että
$$A \cong \mathrm{IM} f \text{ ja } B/\mathrm{IM} f \cong C.$$

2. Olkoon $B \in \mathrm{OBJ}({}_R\mathrm{MOD})$. Muodosta kontravariantti funktori $T = \mathrm{HOM}_R(\ \ , B)$ ja osoita, että indusoitu kuvaus $f^* = T(f)$ on R-kuvaus.

3. a) Olkoon M vapaa R-moduli, missä R on kokonaisalue.
   Olkoon $r \in R,\ m \in M$ ja $rm = 0$. Näytä, että $r = 0$ tai $m = 0$.
   b) Olkoon K kunta sekä $V = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$ ja $W = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ K-moduleita. Määrää sellaiset vektorit $v_i \in V$ ja $w_i \in W$, että
   $v_1 \otimes w_1 = f_2 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$,
   $v_2 \otimes w_2 = f_1 \otimes g_1 - f_2 \otimes g_2$.

4. Olkoon R ei-kommutatiivinen rengas ja A, A' oikeanpuoleisia sekä B, B' vasemmanpuoleisia R-moduleita. Olkoot
$$f : A_R \to A'_R,\ g :_R B \to_R B'$$
R-kuvauksia. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{Z}$-kuvaus
$$F : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B',$$
jolle pätee
$$F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$
aina, kun $a \in A, b \in B$.

5. Olkoon
$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$
ketjukompleksi, missä $\ell_p = \mathrm{RANK} C_p, Z_p = \mathrm{KER} \partial_p, B_p = \mathrm{IM} \partial_{p+1}$,
$H_p = Z_p/B_p, R_p = \mathrm{RANK} H_p$. Osoita, että jono
$$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \to 0$$
on eksakti ja, että
$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \ell_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p.$$