Algebra III

Loppukoe 27.2.2006 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Oletetaan, että A, B, C ovat R-moduleita ja f, g ovat R-kuvauksia ja olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eksakti jono. Osoita, että

$$A \cong \textsc{Im} f \text{ ja } B/\textsc{Im} f \cong C.$$

2. Olkoon $B \in \mathrm{OBJ}({}_R\mathrm{MOD})$. Muodosta kontravariantti funktori $T = \mathrm{HOM}_R(\ \ , B)$ ja osoita, että indusoitu kuvaus $f^* = T(f)$ on R-kuvaus.

3. a) Olkoon R ei-kommutatiivinen rengas ja A oikeanpuoleinen sekä B vasemmanpuoleinen R-moduli. Määrittele tensoritulo $A \otimes_R B$ ja $a \otimes b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$.

   b) Osoita, että

$$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c \qquad \forall\ a \in A; b, c \in B.$$

4. Olkoon R ei-kommutatiivinen rengas ja M vasen R-moduli. Osoita, että

$$R \otimes_R M \cong M.$$

5. Olkoon

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

ketjukompleksi, missä $\ell_p = \textsc{Rank} C_p, Z_p = \textsc{Ker} \partial_p, B_p = \textsc{Im} \partial_{p+1}$,
$H_p = Z_p/B_p, R_p = \textsc{Rank} H_p$. Osoita, että jono

$$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \to 0$$

on eksakti ja, että

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \ell_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p.$$