

1. a) Määrää kaikki Gaussin kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}[i]$ alkuaikiot eli Gaussin alkuluvut $\pi = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, joille pätee $N(\pi) \leq 5$, $0 \leq b \leq a$.

b) Näytä Gaussin kokonaislukujen renkaassa, että

$$1 + i \sim 1 - i \quad \text{ja} \quad 2 + i \not\sim 1 + 2i.$$

2. a) Olkoot $b(x), c(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitiivisiä polynomeja. Osoita, että tällöin $b(x)c(x)$ on primitiivinen.

b) Näytä reduktiokuvauksen avulla, että

$$10x^3 - x + 28$$

on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$.

3. Määrää luvun

a) $\alpha = 2^{1/7}$;

b) $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;

aste $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha$ ja minimipolynomi $M_{\alpha}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ kunnan \mathbb{Q} yli. Perustelut.

4. a) Määrää $\mathbb{Q}(2^{1/2}) \cap \mathbb{Q}(2^{1/3})$.

b) Olkoon \mathbb{K} lukukunta ja $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ sen kokonaislukujen rengas sekä $a, b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Osoita, että normille N pätee

$$a \underset{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}{|} 1 \quad \Rightarrow \quad N(a) \underset{\mathbb{Z}}{|} 1.$$