802656S Algebralliset luvut

Loppukoe 7.5.2012

1. a) Määrää lukukunnan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ yksiköt.

   b) Onko polynomi $x^4 - 7x^2 + 1$ jaollinen polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$?

2. Määrää algebrallisen kuntalaajennuksen $\mathbb{K} = \left\langle \mathbb{Q}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10} \right\rangle$ dimensio ja kanta rationaalilukujen kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen. Esitä lisäksi kunta $\mathbb{K}$ muodossa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tau)$.

3. a) Olkoot p alkuluku, $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\bar{a}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ ja $A = \deg a(x) = \deg \bar{a}(x)$. Oletetaan myös, että $\bar{a}(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_p[x]$. Osoita, että tällöin $a(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Z}[x]$.

   b) Olkoot $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tau)$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = m$. Osoita ensin, että alkion $\beta \in \mathbb{K}$, jonka aste $\deg_{\mathbb{Q}} \beta = d$, minimipolynomi $M_\beta(x)$ jakaa polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$ kuntapolynomin $K_\beta(x)$. Osoita tämän jälkeen, että
$$K_\beta(x) = M_\beta(x)^{m/d}, \quad \frac{m}{d} \in \mathbb{Z}^+.$$

4. Määrittele Eukleideen alue. Osoita, että lukukunnan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ kokonaislukujen rengas $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ on Eukleideen alue. Onko $(3+i)(3-i) = 2\cdot 5$ esimerkki ei-yksikäsitteisestä tekijöihinjaosta renkaassa $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$?