802656S ALGEBRALLISET LUVUT (5OP Syventävä)

Loppukoe 9.5.2011 EI LASKIMIA

1. Olkoon $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

a) Määrää R:n yksikköryhmä R^*.
b) Määrää lukujen 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ liitännäisalkiot.
c) Ovatko 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ jaottomia?
d) Ovatko 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ alkualkioita? (Tutki yhtälöä $3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$.)
e) Onko R UFD?
f) Onko R Eukleideen alue?

2. a) Olkoon $a(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_A x^A \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg a(x) = A \geq 2$. Jos on olemassa sellainen alkuluku $p \in \mathbb{P}$, että

$$p | a_i \quad \forall\ i = 0, 1, ..., A-1, \quad p^2 \not| a_0, \quad p \not| a_A,$$

niin todista, että $a(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$.

b) Näytä reduktiokuvauksen avulla, että

$$10x^3 - x + 28$$

on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$.

3. Määrää luvun

a) $\alpha = 1 + \sqrt{-3}$;

b) $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;

aste $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha$ ja minimipolynomi $M_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ kunnan $\mathbb{Q}$ yli.

4. a) Näytä, että $2^{1/2} \notin \mathbb{Q}(2^{1/3})$.

b) Olkoon $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^*$ lukukunnan $\mathbb{K}$ kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ yksikköryhmä sekä $a, b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Osoita, että normille N pätee

$$a \underset{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}{|} b \quad \Rightarrow \quad N(a) \underset{\mathbb{Z}}{|} N(b).$$