

802656S Algebralliset luvut

Loppukoe 26.11.2012

1. Määrittää algebrallisen kuntalaajennuksen $K = \langle \mathbb{Q}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3} \rangle$ dimensio ja kanta rationaalilukujen kunnan \mathbb{Q} suhteen. Onko $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})$?
2. Määrittele kokonaisalueen D alkualkio ja jaoton alkio. Merkitään kokonaisalueen D alkualkioiden joukkoa P_D :llä ja jaottomien alkioden joukkoa J_D :llä. Osoita seuraavat tulokset:
 - (i) Joukko P_D on joukon J_D osajoukko.
 - (ii) Jos D on yksikäsitteinen tekijöihin jakoalue (UFD), niin joukko J_D on joukon P_D osajoukko.
3.
 - a) Olkoon $b(x)$ ja $c(x)$ primitiivisiä polynomeja. Osoita, että $b(x)c(x)$ on primitiivinen.
 - b) Määrittää luvun $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ minimipolynomi $M_\alpha(x) \in \mathbb{Q}(x)$ kunnan \mathbb{Q} yli.
4.
 - a) Tiedetään, että Neperin luku e on transkendenttinen. Voiko luku $\sqrt[3]{e} + 2e$ olla algebrallinen?
 - b) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$y^2 + 2 = x^3, \quad 2 \nmid y.$$