

802656S Algebralliset luvut

Loppukoe 28.5.2012

1. Määää algebrallisen luvun $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimipolynomi.
2. a) Määää algebrallisen kuntalajennuksen $\mathbb{K} = \langle \mathbb{Q}, \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3} \rangle$ dimensio ja kanta rationaalilukujen kunnan \mathbb{Q} suhteen.
b) Olkoon $b(x)$ ja $c(x)$ primitiivisiä polynomeja. Osoita, että $b(x)c(x)$ on primitiivinen.
3. a) Todista lause: Jos α on algebrallinen luku, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku c , että $c\alpha$ on kokonainen algebrallinen luku.
b) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$y^2 + 1 = x^3,$$

kun y on parillinen kokonaisluku.

4. Määrittele lukukunnan \mathbb{K} kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ yksiköt ja jaottomat alkiot. Osoita seuraavat tulokset:
 - (i) Luku $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ on yksikkö jos ja vain jos normi $N(a) = \pm 1$.
 - (ii) Jos luvun $b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ normi $N(b)$ on alkuluku, niin b on jaoton.

Anna esimerkit kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ yksiköstä ja jaottomasta alkioista.