

1. a) Määrää kaikki Gaussin kokonaislukujen renkaan  $\mathbb{Z}[i]$  alkualkiot eli Gaussin alkuluvut  $\pi = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ , joille pätee  $N(\pi) \leq 5$ ,  $0 \leq b \leq a$ .

b) Näytä Gaussin kokonaislukujen renkaassa, että

$$1 + i \sim 1 - i \quad \text{ja} \quad 2 + i \not\sim 1 + 2i.$$

2. a) Olkoon  $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Ax^A \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $\deg a(x) = A \geq 2$ . Jos on olemassa sellainen alkuluku  $p \in \mathbb{P}$ , että

$$p|a_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, A-1, \quad p^2 \nmid a_0, \quad p \nmid a_A,$$

niin todista, että  $a(x)$  on jaoton polynomirenkaassa  $\mathbb{Q}[x]$ .

b) Näytä reduktiokuvauksen avulla, että

$$10x^3 - x + 28$$

on jaoton polynomirenkaassa  $\mathbb{Q}[x]$ .

3. Määrää luvun

a)  $\alpha = 2^{1/7}$ ;

b)  $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ ;

aste  $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha$  ja minimipolynomi  $M_{\alpha}(x) \in \mathbb{Q}[x]$  kunnan  $\mathbb{Q}$  yli. Perustelut.

4. Olkoon  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ . Määrää yksikköryhmä  $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^*$ .