

## ANALYYSI I

Loppukoe, 8.11.2010

**Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.** Tentin valvojilla on pari kopiota luentomonisteesta joita voi lainata.

1. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+4}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2^k k}$$

itseisesti. Entä ehdollisesti?

2. Olkoon  $f(x) = x e^{2x}$  (määrittelyjoukko on  $\mathbb{R}$ ). Laske

$$f^{(50)}(0) \quad \text{ja} \quad f^{(51)}(0).$$

3. Anna esimerkki ja funktiosta  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jolle pätee seuraavat kaksi ehtoa:

- $f$  on jatkuva joukossa  $(-1, 1)$ ; ja
- $f$  is ole jatkuva missään avoimessa joukossa  $B$  joka sisältää joukon  $[-1, 1]$ .

4. (a) Todista määritelmään nojautuen, että funktio

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä  $[0, 1]$ . Laske  $\int_0^1 f(x) dx$ .

(b) Määrää  $f'(x)$ , kun

$$f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt.$$

5. Olkoot  $0 < a < b$ . Tutki, suppeneeko sarja  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^2 + 2k}{k^2}$  tasaisesti välillä  $[a, b]$ . Onko funktio  $S(x)$  jatkuva?