Analyysi I

Loppukoe, 21.6.2010

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

1. Perustele tarkasti (määritelmää käyttäen) seuraavat väitteet:

   (a) Joukko $]-2,0[$ on avoin ja 0 on sen kasautumispiste.

   (b) Joukko $]-1,1]$ ei ole avoin eikä suljettu.

2. Tutki, suppenevatko sarjat

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3k-1} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$$

   itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

3. Anna esimerkki jonosta (x_n) joka on rajoitettu mutta ei suppene, ja jolla on vähenevä osajono (x_{n_k}) joka suppenee kohti lukua 0.

4. Olkoon

$$f\colon [0,\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x^2), & \text{kun } x \in [0,\frac{\pi}{2}[, \\ 3, & \text{kun } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   (a) Osoita, että f on Riemann integroituva välillä $[0,\frac{\pi}{2}]$.

   (b) Tutki, missä pisteissä funktio $F\colon]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ on derivoituva ja laske $F'(x)$ niissä pisteissä.

5. Olkoon (f_n) jono sellaisia funktioita $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, että on olemassa $M > 0$ jolle

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M2^{-n}$$

   kaikilla $x \in [a,b]$ ja kaikilla $n = 1,2,\ldots$ Osoita, että (f_n) suppenee tasaisesti kohti jotakin funktiota $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.