

# Analyysi I

Loppukoe, 4.10.2010

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja. Tentin valvojilla on pari kopiota luentomonisteesta joita voi lainata.

1. Perustele tarkasti (määritelmää käyttäen) suppeneeko jono  $(x_k)$  kun:

$$(a) x_k = (-1)^k \left(1 - \frac{1}{1+k}\right) \quad (b) x_k = (-1)^k \left(1 - \frac{k}{1+k}\right).$$

2. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+3} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$$

itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

3. Anna esimerkki Riemann integroituvasta funktiosta  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jolle pätee

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1, \quad \int_{-1}^0 f(x) dx = -1, \quad \int_{-1}^1 |f(x)| dx = 2,$$

4. Määrää sarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2 + \frac{1}{2})^{2k+2}$  summafunktiio.

5. Oletetaan, että  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ovat (joukossa  $[0, 1]$ ) jatkuvia funktioita ja että  $f(x) = g(x)$  kaikilla  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . Todista, että  $f(x) = g(x)$  kaikilla  $x \in [0, 1]$ .