ANALYYSI I

Loppukoe 8.2.2010

1. Olkoon
$$x_1 = 2 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 9.$$
Osoita, että jono (x_n) suppenee ja määrää sen raja-arvo.

2. a) Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}$ ja $f\colon D \to \mathbb{R}$. Määrittele funktion f tasainen jatkuvuus joukossa D.

   b) Olkoon $L > 0$ vakio ja $f\colon D \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ aina, kun x, $y \in D$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva joukossa D.

3. Todista määritelmään nojautuen, että funktio
$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$
on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$. Laske $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Määrää potenssisarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3x)^k}{\sqrt{k}}$$
suppenemissäde R. Suppeneeko sarja itseisesti tai ehdollisesti pisteessä R?

5. Oletetaan tunnetuksi Bolzanon–Weierstrassin lause eli että jokaisella rajoitetulla reaalilukujonolla on suppeneva osajono. Osoita tämän avulla, että reaalilukujono (x_n) suppenee, *jos ja vain jos* se on Cauchyn jono.