Analyysi I

Loppukoe, 14.2.2011

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

1. Todista huolellisesti perustellen (eli määritelmää käyttäen), että

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} n^{-3/2} = 0, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to 0} \frac{e^n}{n^2} = +\infty,$$

2. Anna esimerkki yhdestä jonosta (x_n) jolla on kaikki seuraavat ominaisuudet:

   (a) sillä on sekä aidosti kasvava että aidosti vähenevä osajono; ja

   (b) se on ylhäältä rajoitettu, mutta ei alhaalta rajoitettu.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $|f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{|x-y|}$, missä $L > 0$ on vakio. Osoita, että f on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

4. Osoita, että funktio

$$f\colon [0,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in [0,1], \\ 2-x & \text{muulloin} \end{cases}$$

   on Riemann-integroituva välillä $[0,3]$ ja määrää $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

5. a) Millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^3 2^k}$$

   suppenee?

   b) Tutki, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|x| + k^5}$$

   tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.