Analyysi I

Loppukoe, 17.5.2010

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

HUOM! Tämä on Analyysi 1:n loppukoe; jos olet osallistumassa ***kevään luentojen viidenteen välikokeeseen*** *tämä on väärä paperi.*

1. Todista huolellisesti perustellen (eli määritelmää käyttäen), että

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{n^2} = 0, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} (n + 8(-1)^n) = +\infty,$$

2. Olkoon $f(x) = \cos(2x)$ ja $g(x) = \sin(x^2)$ (määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$). Laske

$$f^{(50)}(0), f^{(51)}(0), g^{(50)}(0), g^{(51)}(0).$$

   (Vihje: Käytä sarjakehitelmää)

3. Anna esimerkki jonosta (x_n) joka ei ole rajoitettu mutta jolla on monotoninen osajono (x_{n_k}) joka suppenee kohti lukua 1.

4. Olkoon

$$f\colon [0,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \le x < 2, \\ 1 + x, & \text{kun } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

   (a) Osoita, että f on Riemann integroituva välillä $[0,3]$.

   (b) Tutki, missä pisteissä funktio $F\colon\,]0,3[\, \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ on derivoituva ja laske $F'(x)$ niissä pisteissä. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat.

5. Olkoon (f_n) jono sellaisia funktioita $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, että on olemassa $M > 0$ jolle

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le M2^{-n}$$

   kaikilla $x \in [a,b]$ ja kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Osoita, että (f_n) suppenee tasaisesti kohti jotakin funktiota $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.