Analyysi 2
1. välikoe 25.10.2010

Koeaika on kolme tuntia.

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.
(a) $\partial\mathbb{R} = \emptyset$.
(b) 0 on joukon $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ kasautumispiste.
(c) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $(\frac{k}{k^2+1}, 1, \frac{2k}{k+1})$ suppenee, kun $k \to \infty$.

2. (a) Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat kuvauksia ja että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ sekä } \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

Osoita, että

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

(b) Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = xyz \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

suunnattu derivaatta vektorin $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ suuntaan pisteessä $(1, 0, 1)$.

3. (a) Miten määritellään kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivaatta pisteessä $a \in \mathbb{R}^3$?
(b) Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y + z \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

on derivoituva.

4. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x^2y^2, xy) \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Onko f derivoituva? Perustele vastauksesi.
(b) Laske derivaatta $f'(0, 1)$.
(c) Laske $(f'(0, 1))(1, 0)$.