Analyysi 2
Loppukoe 19.4.2010

1. Osoita, että pallo
$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$
on avoin joukko.

2. (a) Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = x^2 + z \text{ kaikilla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
on differentioituva.
(b) Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
kriittiset pisteet ja niiden laatu.

3. (a) Oletetaan, että piste $a \in \mathbb{R}^n$ on funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokaali ääriarvokohta ja että f on derivoituva pisteessä a. Osoita, että $\operatorname{grad} f(a) = 0$.
(b) Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = (-y, x, y) \text{ kaikilla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
integraali pitkin polkua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,
$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \text{ kaikilla } t \in [0,1].$$

4. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = (y, x, x+z) \text{ kaikilla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Onko f differentioituva? Perustele vastauksesi.
(b) Laske derivaatta $f'(0,1,2)$.
(c) Laske $(f'(0,1,2))(1,1,1)$.

5. Oletetaan, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että f on osittaisdifferentioituva jokaisen muuttujansa suhteen pisteessä a.