Analyysi 2
Loppukoe 16.12.2010

1. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
on differentioituva.

2. Laske joukon
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
pinta-ala.

3. (a) Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
kriittiset pisteet ja niiden laatu.
(b) Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = (x,z,x) \text{ kaikilla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
integraali pitkin polkua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,
$$\alpha(t) = (0,t,t^2) \text{ kaikilla } t \in [0,1].$$

4. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos sen jokainen koordinaattifunktio $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä a.

5. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sellainen kuvaus, että $|f(x) - f(a)| \leq 2|x-a|^2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Laske $f'(a)$.