Analyysi 2
Loppukoe 24.1.2011

1. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvauksella $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{kun } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

on suunnatut derivaatat jokaiseen suuntaan origossa.

2. Onko kuvaus $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = (x \sin x, y \sin x) \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

derivoituva? Jos on, laske sen derivaatta pisteessä $(0,1)$.

3. Laske

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

kun $R = [0,180] \times [1,180]$ ja $f(x,y) = \max\{x+y, 180\}$.

4. Osoita, että jono (a_k) on Cauchy-jono $\mathbb{R}^n$:ssä, jos ja vain jos sen jokainen koordinaattijono (a_k^j), missä $j = 1, \ldots, n$, on Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä.

5. Oletetaan, että integraali $\int_\alpha f \cdot d\alpha$ on olemassa. Osoita, että

$$\int_{\overleftarrow{\alpha}} f \cdot d\overleftarrow{\alpha} = -\int_\alpha f \cdot d\alpha,$$

missä $\overleftarrow{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ on polun $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vastakkainen polku

$$\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(b-(t-a)) \text{ kaikilla } t \in [a,b].$$