Analyysi 2
Loppukoe 25.1.2010

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $R > 0$. Osoita, että pallo

$$B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < R\}$$

on avoin joukko.

2. (a) Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x + y^2 \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

on differentioituva.
(b) Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

kriittiset pisteet ja niiden laatu.

3. (a) Laske joukon

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le |y| \text{ ja } -1 \le y \le 1\}$$

pinta-ala.
(b) Laske kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x, z, y) \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

integraali pitkin polkua $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (2t, t^2, 0) \text{ kaikilla } t \in [0, 1].$$

4. (a) Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} (x_2 \sin t + \cos(x_2 t))\, dt \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Laske $\partial_1 \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2)$.
(b) Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

2. asteen Taylorin polynomi origossa.

5. Olkoon $a \in \mathbb{R}^m$. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sellainen kuvaus, että $|f(x) - f(a)| \le 3|x - a|^4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $f'(a) = 0$.