Analyysi 3

Kesätentti 1.7.2009

1. (a) Osoita, että $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$. Voit olettaa tunnetuksi, että $\mathbb{Q}$ on numeroituva. (3 p.)
   (b) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $m_2^*(A) = 0$. (3 p.)

2. Olkoon funktiojono
$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x},\ x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{Z}_+ .$$
Laske raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{dm}\,.$$
Luonnollisesti vastaus on perusteltava. (6 p.)

3. (a) Esitä Fatoun lemma. (2 p.)
   (b) Laske integraali
$$\int_{[-1,1]\setminus\mathbb{Q}} x^2\,\mathrm{dm}\,.$$
Vastaus on tietysti perusteltava. (4 p.)

4. (a) Olkoot $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $1 \leqslant p < \infty$. Määrittele avaruus $L^p(E)$ ja sen normi. (2 p.)
   (b) Esitä Hölderin epäyhtälö. (2 p.)
   (c) Olkoot $x \in l^2$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $N \in \mathbb{Z}_+$ kiinteä sekä $L : l^2 \to \mathbb{K}$, $L(x) = x_N$. Oletetaan tunnetuksi, että L on lineaarinen ja jatkuva funktionaali. Etsi sellainen $y_0 \in l^2$, jolla $\forall x \in l^2 : L(x) = (x \mid y_0)$. Sisätulo on luonnollisesti avaruuden l^2 "tavanomainen" sisätulo. Montako tällaista y_0 voi olla olemassa? (2 p.)

5. (a) Osoita, että $\mathbb{R}^n$ varustettuna normilla $||x|| = \max\{|x_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ ei ole sisätuloavaruus. Muista perustelut. (2 p.)
   (b) Olkoot H Hilbertin avaruus, $S \subset H$ suljettu ja konveksi, luonnollisesti S ja H epätyhjiä ja $x \in H$ kiinteä. Osoita, että on olemassa sellainen $y_0 \in S$, että
$$||x - y_0|| = \inf\{||x - y|| \mid y \in S\}\,.$$
(4 p.)