Analyysi III, 15.6.2009

1. Määrittele Lebesguen integraali $\int_E f dm$ seuraavissa kolmessa tapauksessa:

(a) E on mitallinen joukko ja f on yksinkertainen funktio.

(b) E on mitallinen joukko ja f on mitallinen, ei-negatiivinen funktio E:ssä.

(c) E on mitallinen joukko ja f on mitallinen funktio E:ssä.

2. Olkoon (x_n) jono Hilbertin avaruudessa H siten, että $(x_n|x) \to ||x||^2$ ja $||x_n|| \to ||x||$ kun $n \to \infty$. Osoita, että (x_n) suppenee kohti x avaruudessa H.

3. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Oletetaan, että $E \in \Gamma$ ja $\mu(E) < \infty$. Osoita, että jos $E_i \in \Gamma$, $E_i \subset E$ ja $\mu(E_i) \geq 1$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$, niin silloin

$$\mu(\cap_{j=1}^{\infty}(\cup_{i=j}^{\infty} E_i)) \geq 1.$$

4. Olkoon $(f_n)_n$ totaali ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa $L^2([a,b])$. Osoita, että kaikilla $x \in [a,b]$ pätee, että $x - a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^x \overline{f_n(t)}\, dt \right|^2$.

5. Olkoon $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ jatkuva funktio siten, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = \delta$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(nx)\, dx = a\delta \quad \text{kaikilla } a > 0.$$