Analyysi III, 8.2.2010

1. Formuloi seuraavat lauseet ja epäyhtälöt:

   (a) Egoroffin lause.
   (b) Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.
   (c) Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.
   (d) Besselin epäyhtälö.

2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ sellainen mitallinen joukko, että $m(E) < \infty$. Jos $f : E \to \mathbb{R}$ on mitallinen funktio ja

$$A_n = \{x \in E : f(x) > n\} \quad (n = 1, 2, ...),$$

niin osoita, että $m(A_n) \to 0$ kun $n \to \infty$.

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2}\, dx.$$

Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

4. Olkoon $(f_n)_n$ totaali ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa $L^2([a, b])$. Osoita, että kaikilla $x \in [a, b]$ pätee, että $x - a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^x \overline{f_n(t)}\, dt\right|^2$.

5. Olkoon H Hilbertin avaruus (yli $\mathbb{C}$:n) ja olkoot $x, y \in H$. Osoita, että

$$x \perp y \text{ jos ja vain jos } ||x + \lambda y|| \geq ||x|| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$