

Analyysi III, 9.2.2009

1. Formuloi seuraavat lauseet ja epäyhtälöt:

- (a) Egoroffin lause.
- (b) Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.
- (c) Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.
- (d) Besselin epäyhtälö.

2. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia. Osoita, että

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx.$$

Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

4. Olkoon $(f_n)_n$ totaali ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa $L^2([a, b])$. Osoita, että kaikilla $x \in [a, b]$ pätee, että $x - a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^x \overline{f_n(t)} dt \right|^2$.

5. Olkoon H Hilbertin avaruus (yli \mathbb{C} :n) ja olkoot $x, y \in H$. Osoita, että

$$x \perp y \text{ jos ja vain jos } \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$