Analyysi III, 11.5.2009

1.

(a) Määrittele $L^p(E)$ avaruus ja sen normi, kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$.

(b) Esitä Egoroffin lause.

(c) Esitä Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.

(d) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Näytä, että $m_n^*(\{x\}) = 0$.

2. Olkoot (x_n) ja (y_n) jonoja Hilbertin avaruudessa H siten, että $||x_n|| \leq 1$ ja $||y_n|| \leq 1$ kaikilla n ja $\lim_{n\to\infty}(x_n|y_n) = 1$. Osoita, että $\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0$.

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\ dx,$$

missä $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^n+1} + \frac{x^n}{x^n+1}$, kun $x \in]0,2]$ ja $n = 0, 1, 2, \ldots$
Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

4. Reaalisten polynomien avaruus

$$P_3(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

on $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus. Etsi sellainen $p \in P_3(\mathbb{R})$, että $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ ja

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

on niin pieni kuin mahdollista.

5. Olkoon H Hilbertin avaruus (yli $\mathbb{C}$:n) ja olkoot $x, y \in H$. Osoita, että

$$x \perp y \text{ jos ja vain jos } ||x + \lambda y|| \geq ||x|| \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}.$$