Analyysi III, 20.9.2010

1.

(a) Määrittele $L^p(E)$ avaruus ja sen normi, kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$.

(b) Esitä Egoroffin lause.

(c) Esitä Hölderin epäyhtälö.

(d) Esitä Besselin epäyhtälö.

2. Olkoon H sisätuloavaruus ja $x \in H$. Osoita, että

$$||x|| = \sup_{||y||=1} |(x|y)|.$$

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko ja $f : E \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio siten, että

$$\int_E |f|\, dm < \infty.$$

Jos $A_n = \{x \in E : f(x) > n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, niin osoita, että $m(A_n) \to 0$ kun $n \to \infty$.

4. Olkoon $(f_n)_n$ totaali ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa $L^2([a,b])$. Osoita, että kaikilla $x \in [a,b]$ pätee, että $x - a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^x \overline{f_n(t)}\, dt \right|^2$.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx.$$

Luonnollisesti vastaus on perusteltava.