Analyysi III, 21.2.2011

1. (a) Määrittele $L^p(E)$ avaruus ja sen normi, kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$.

(b) Formuloi Hölderin epäyhtälö.

(c) Osoita, että funktionaali $L : l^2 \to \mathbb{K}$, $L((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$, missä $(y_n)_n \in l^2$, on lineaarinen ja jatkuva.

(d) Olkoot $N \geq 1$ ja $L : l^2 \to \mathbb{K}$, $L((x_n)_n) = x_N$, jatkuva lineaarinen funktionaali. Etsi $y_0 \in l^2$ siten, että $L(x) = \langle x | y_0 \rangle$ kaikilla $x \in l^2$.

2. (a) Onko avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna normilla $||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ sisätuloavaruus? Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

(b) Laske $\int_{[-1,1]\setminus\mathbb{Q}} x^2 dm(x)$.

3. Osoita, että tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko $\{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$ on Lebesgue-mitallinen ja sen mitta $= 0$.

4. Olkoon $S \neq \emptyset$ Hilbertin avaruuden H suljettu konveksi joukko sekä $x \in H$. Todista, että on olemassa alkio $y_0 \in S$, jolle

$$||x - y_0|| = \inf\{||x - y|| : y \in S\}.$$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx,$$

missä $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x}$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n = 0, 1, 2, ...$