

Analyysi III, 21.9.2009

1. Formuloi seuraavat lauseet ja epäyhtälöt:

- (a) Egoroffin lause.
- (b) Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.
- (c) Hölderin epäyhtälö.
- (d) Besselin epäyhtälö.

2. (a) Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Oletetaan, että $g(x) \neq 0 \forall x \in E$. Osoita, että $\frac{f}{g}$ on mitallinen E :ssä.

(b) Etsi esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jolle f^2 on mitallinen, mutta f ei ole mitallinen.

3. (a) Määrittele $L^p(E)$ avaruus ja sen normi, kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$.

(b) Osoita, että funktionaali $L : l^2 \rightarrow \mathbb{K}$, $L((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$, missä $(y_n)_n \in l^2$, on lineaarinen ja jatkuva.

(c) Olkoot $N \geq 1$ ja $L : l^2 \rightarrow \mathbb{K}$, $L((x_n)_n) = x_N$, jatkuva lineaarinen funktionaali. Etsi $y_0 \in l^2$ siten, että $L(x) = \langle x | y_0 \rangle$ kaikilla $x \in l^2$.

4. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx.$$

Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

5. Olkoon H Hilbertin avaruus (yli \mathbb{C} :n) ja olkoot $x, y \in H$. Osoita, että

$$x \perp y \text{ jos ja vain jos } \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$