

806112P DATA-ANALYYSIN PERUSMENETELMÄT (Jari Päckilä)

Loppukoe, ma 11.04.2011 klo 14-18

Mukana saa olla KAKSI molemmin puolin täytettyä A4-kokoista lunttilappua sekä tavanomainen funktiolaskin tai graafinen laskin. Tarvittavat taulukot ovat liitteinä.

Vastaa kaikkiin kysymyksiin.

1. Erään uuden ahdistuneisuutta lievittävän psykelääkkeen fenobaamin vaikutusta tutkittiin määräämällä 16 koehenkilölle päivittäin kolmen viikon ajan fenobaamia, samoin 16 koehenkilölle toista ahdistuksen lievittäjää diatsepaamia sekä vielä 16 koehenkilölle C-vitamiinitabletteja (lume) vastaavalla annostusaikataululla. Ahdistuneisuutta mitattiin ns. Hamiltonin ahdistuneisuusasteikon (Hamilton anxiety score, HAS) avulla, ja mittaustulokset kirjattiin kunkin hoitoryhmän kaikilta potilailta kolmen viikon koejakson jälkeen. Oheisessa taulukossa tiivistelmä tuloksista (vastemuuttujan havaitut otoskeskiarvot ja -hajonnat) hoitoryhmittäin.

ryhmä	HAS-keskiarvo	HAS-keskihajonta
fenobaami ($n = 16$)	15.0	8.0
diatsebaami ($n = 16$)	17.0	$\sqrt{79}$
C-vitamiini ($n = 16$)	22.0	10.0
kaikki ($n = 48$)	18.0	9.33

- Minkä niminen tai tyyppinen koeasetelma on kyseessä? Millä edellytyksillä asetelma voi antaa harhattoman vastauksen tutkimuskysymyksiin?
- Analysoi aineistoa asetelmaan sopivin menetelmin ja raportoi tulokset. Kerro myös käyttämäsi menetelmän keskeiset oletukset.
- Analysoi erityisesti Fenobamin ja C-vitamiinin välistä kontrastia sopivin menetelmin. Antaako aineisto tukea oletukselle, että Fenobam on C-vitamiinia hyödyllisempi masennuksen lievittämisessä?

(6 p)

2. Monet kasvit tuottavat ns. sekundääriyhdisteitä, jotka ovat kasveja syöville eläimille epämieluisia. Kokeessa haluttiin tietää, aiheuttaako kasvin syöminen muutoksia siinä olevien sekundääriyhdisteiden määrässä. Koetta varten valittiin satunnaisesti kuusi tunturikoivua, joiden sekundääriyhdisteiden määrät mitattiin tarkoitusta varten kehitetyllä laitteella. Mittausten jälkeen samojen tunturikoivujen lehdistä siirrettiin tunturikoivua syöviä tunturimittarin toukkia. Kolmen vuorokauden kuluttua sekundääriyhdisteiden määrät mitattiin uudelleen. Kokeesta saadut mittaustulokset olivat:

Koivu- yksilö	sekundääriyhdisteiden määrä	
	Mittaus ennen mittarimatoja	Mittaus mittari- matojen jälkeen
1	51.7	62.5
2	54.2	65.2
3	53.3	67.6
4	57.0	69.9
5	56.4	69.4
6	61.5	70.1

Aineiston lähde: Ranta E, Rita H, Kouki J. *Biometria*. Helsinki: Yliopistopaino, 1994.

- (a) Minkä niminen tai tyyppinen koeasetelma on kyseessä? Määrittele tutkimusongelman ("aiheuttaako kasvin syöminen muutoksia sekundääriyhdisteiden määrässä") kuvaamiseen soveltuva vertailuparametri ja sitä koskeva nollahypoteesi.
- (b) Testaa kohdan (a) nollahypoteesia ja laske ao. parametrin 95 %:n luottamusväli. Mitä päätelmiä voit tehdä tulosten perusteella?

(6 p)

3. Liite 1 sisältää tuloksia tutkimuksesta, jonka kohteena oli kypsän *cheddar*-juuston makuominaisuuksien riippuvuus erilaisten kemikaalien pitoisuuksista. Vastemuuttuja maku on makupistemäärä, joka saatiin laskemalla useiden eri maistajien antamien subjektiivisten makupisteiden summa. Samat maistajat arvioivat toisistaan riippumatta 30 eri juustonäytettä, joista lisäksi tehtiin kemialliset analyysit ja mitattiin mm. seuraavien selittävien muuttujien arvot:

$\ln.\text{ethap}$ = etikkahappoisuuden luonnollinen logaritmi,
 $\ln.\text{H2S}$ = rikkivetypitoisuuden luonnollinen logaritmi,
 maitohap = maitohappopitoisuus.

Tutustu liitteen tulostuksiin ja piirroksiin huolellisesti ja vastaa seuraaviin kysymyksiin perustellen päätelmäsi.

- (a) Selitä lyhyesti mitä tarkoitetaan muuttujien välisellä (multi)kollineaarisuudella. Mitä ilmeisiä seurauksia kollineaarisuudesta on eri selittäjien vaikutusten arvioinnin kannalta?
- (b) Kuinka merkittäväksi ongelmaksi arvioisit (multi)kollineaarisuuden tässä aineistossa, kun tarkastellaan erityisesti mallia, joka sisältää kaikki kolme selittävää muuttujaa? Kuinka suuria ovat kollineaarisuutta kuvaavan tunnusluvun arvot mallissa, jossa selittävinä muuttujina ovat pelkästään $\ln.\text{H2S}$ ja maitohap ?
- (c) Tarkastellaan edelleen mallia, jossa on mukana vain $\ln.\text{H2S}$ ja maitohap . Kuviossa 1b on eräitä diagnostisia piirroksia tämän mallin sovituksen pohjalta. Mitä nämä kuvat kertovat sinulle mallin oletusten realistisuudesta ym. seikoista?

(6 p)

4. Tutkimuksessa haluttiin selvittää sitä eroavatko kahden perunalajikkeen (Fambo ja Van Gogh) tärkkelyspitoisuudet toisistaan. Tutkimusryhmän käytössä oli 16 koealaa, joista kahdeksalla satunnaisesti valitulla koealalla viljeltiin Fambo-lajiketta ja lopuilla koealoilla Van Gogh-lajiketta. Koealoittain saatiin tärkkelyspitoisuuksien osalta seuraavat tulokset (%):

Fambo: 16.1, 16.4, 16.7, 16.8, 17.2, 17.2, 17.4, 17.8
Van Gogh: 17.0, 17.0, 17.4, 17.5, 17.6, 17.8, 19.1, 19.2

Laske kiinnostavan parametrin Δ

- (a) piste-estimaatti,
- (b) luottamusväli likimääräisellä 95 % luottamustasolla,
- (c) sekä p-arvo kaksisuuntaiseen merkitsevyydestiin, jossa testataan nollahypoteesia $H_0 : \Delta = 0$,

kun estimointikriteerinä on järjestysluvuin painotettu itseisarvopoikkeamien summa. Tulkitse tulokset lyhyesti. Laskelmissa saattaa auttaa liitteen 2 tiedot.

(6 p)

5. Erään sairaanhoitopiirin syöpätautien klinikalle hoidettaviksi tulleista rintasyöpää sairastavista naisista rajattiin seuraava aineisto. Näillä potilailla kasvaimen halkaisija oli 3–5 cm. Osalla potilaista löytyi etäpesäke eli metastaasi muualta elimistöstä ($Met = 1$), muilla syöpä oli rajoittunut poistettuun kasvaimeen ($Met = 0$). Vastemuuttujana on potilaan elinaika syöpädiagnosin jälkeen. Osalla potilaista "lopullinen" elinaika jäi havaitsematta, ja heidän kohdallaan tiedetään vain, kuinka kauan he ainakin elivät diagnosin jälkeen ennen kuin potilaiden seuruu lopetettiin ja tulokset analysoitiin. Näiden potilaiden seuruuaikoja merkitään seuraavassa $+$:lla. Elinajat ja seuruajat (kuukausina) olivat metastaasin mukaisesti ryhmitettynä seuraavat:

$Met = 1$ ($n = 6$): 1, 5, 10, 20, 25, 61⁺
 $Met = 0$ ($n = 7$): 21, 21⁺, 39⁺, 75⁺, 86⁺, 94⁺, 106⁺

- (a) Tee tarvittavat laskelmat ja piirrä elinaikojen jakauman kuvaamisessa tavallisesti käytettävä parametrittömiin menetelmiin perustuva käyrä kummallekin ryhmälle erikseen samaan koordinaatistoon.
- (b) Mitkä elinajan jakauman sijaintia kuvaavat parametrit voidaan estimoida metastaasiryhmässä ja mitkä niillä, joilla ei ollut metastaasia? Laske ja raportoi näiden parametrien arvot.
- (c) Mitä (a)-kohdassa piirtämäsi käyrät estimoi? Tulkitse saamiasi tuloksia potilaan elossaoloennusteen kannalta, kun ajatellaan tilannetta vuoden kuluttua diagnosista.

(6 p)

LIITE 1

```
> library(car)
> cheese <- read.table("p:/dapmi0/cheese.dat",header=TRUE,sep="")
> attach(cheese)
> cheese
  Case maku ln.ethap ln.H2S maitohap
1     1 12.3   4.543  3.135   0.86
2     2 20.9   5.159  5.043   1.53
3     3 39.0   5.366  5.438   1.57
4     4 47.9   5.759  7.496   1.81
5     5  5.6   4.663  3.807   0.99
6     6 25.9   5.697  7.601   1.09
7     7 37.3   5.892  8.726   1.29
8     8 21.9   6.078  7.966   1.78
9     9 18.1   4.898  3.850   1.29
10    10 21.0   5.242  4.174   1.58
11    11 34.9   5.740  6.142   1.68
12    12 57.2   6.446  7.908   1.90
13    13  0.7   4.477  2.996   1.06
14    14 25.9   5.236  4.942   1.30
15    15 54.9   6.151  6.752   1.52
16    16 40.9   6.365  9.588   1.74
17    17 15.9   4.787  3.912   1.16
18    18  6.4   5.412  4.700   1.49
19    19 18.0   5.247  6.174   1.63
20    20 38.9   5.438  9.064   1.99
21    21 14.0   4.564  4.949   1.15
22    22 15.2   5.298  5.220   1.33
23    23 32.0   5.455  9.242   1.44
24    24 56.7   5.855 10.199   2.01
25    25 16.8   5.366  3.664   1.31
26    26 11.6   6.043  3.219   1.46
27    27 26.5   6.458  6.962   1.72
28    28  0.7   5.328  3.912   1.25
29    29 13.4   5.802  6.685   1.08
30    30  5.5   6.176  4.787   1.25
>
> #lasketaan aluksi perustunnuslukuja
> k.arvo <- round(sapply(cheese[-1],mean),2) #keskiarvot
> hajonta <- round(sapply(cheese[-1],sd),2) #keskihajonnat
> minimi <- round(sapply(cheese[-1],min),2) #minimit
> maksimi <- round(sapply(cheese[-1],max),2) #maksimit
> cbind(k.arvo,hajonta,minimi,maksimi)
      k.arvo hajonta minimi maksimi
maku      24.53  16.26  0.70  57.20
ln.ethap   5.50   0.57  4.48   6.46
ln.H2S     5.94   2.13  3.00  10.20
maitohap   1.44   0.30  0.86   2.01
>
> round(cor(cheese[-1]),3)
```

```

      maku ln.ethap ln.H2S maitohap
maku    1.000   0.550  0.756   0.704
ln.ethap 0.550   1.000  0.618   0.604
ln.H2S   0.756   0.618  1.000   0.645
maitohap 0.704   0.604  0.645   1.000

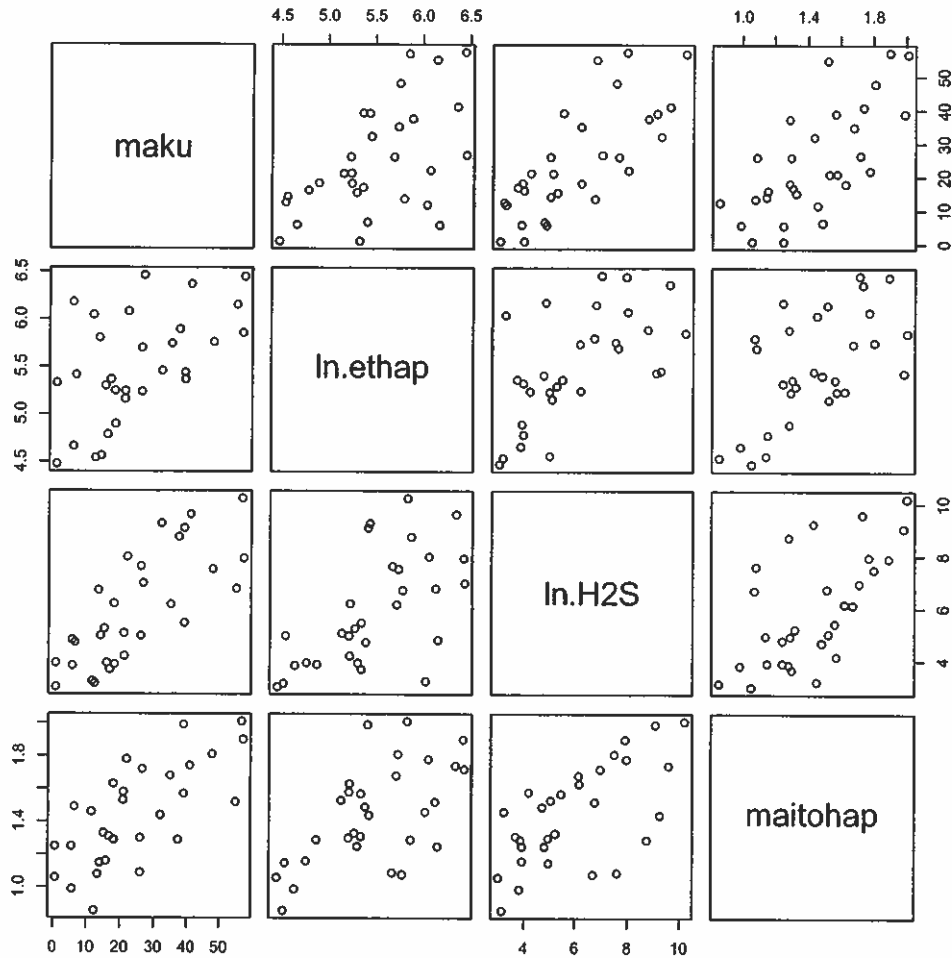
```

```

>
> plot(cheese[-1])

```

KUVIO 1a. Muuttujien välinen sirontakuviomatriisi.



```

> malliA <- lm(maku~ln.H2S)

```

```

> summary(malliA)

```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-9.7868	5.9579	-1.643	0.112
ln.H2S	5.7761	0.9458	6.107	1.37e-06 ***

Residual standard error: 10.83 on 28 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5712, Adjusted R-squared: 0.5558

F-statistic: 37.29 on 1 and 28 DF, p-value: 1.374e-06

```

>

```

```
> malliB <- lm(maku~ln.ethap)
```

```
> summary(malliB)
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-61.499	24.846	-2.475	0.01964 *
ln.ethap	15.648	4.496	3.481	0.00166 **

```
Residual standard error: 13.82 on 28 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.302, Adjusted R-squared: 0.2771
```

```
F-statistic: 12.11 on 1 and 28 DF, p-value: 0.001658
```

```
>
```

```
> malliC <- lm(maku~maitohap)
```

```
> summary(malliC)
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-29.859	10.582	-2.822	0.00869 **
maitohap	37.720	7.186	5.249	1.41e-05 ***

```
---
```

```
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 11.75 on 28 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.4959, Adjusted R-squared: 0.4779
```

```
F-statistic: 27.55 on 1 and 28 DF, p-value: 1.405e-05
```

```
>
```

```
> malliD <- lm(maku~ln.ethap+maitohap)
```

```
> summary(malliD)
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-51.366	21.174	-2.426	0.02223 *
ln.ethap	5.571	4.761	1.170	0.25217
maitohap	31.392	8.956	3.505	0.00161 **

```
Residual standard error: 11.67 on 27 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.5203, Adjusted R-squared: 0.4847
```

```
F-statistic: 14.64 on 2 and 27 DF, p-value: 4.936e-05
```

```
>
```

```
> malliE <- lm(maku~ln.H2S+ln.ethap)
```

```
> summary(malliE)
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-26.940	21.194	-1.271	0.214536
ln.H2S	5.146	1.209	4.255	0.000225 ***
ln.ethap	3.801	4.505	0.844	0.406245

```
Residual standard error: 10.89 on 27 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.5822, Adjusted R-squared: 0.5512
```

```
F-statistic: 18.81 on 2 and 27 DF, p-value: 7.645e-06
```

```
>
```

```
>
```

```

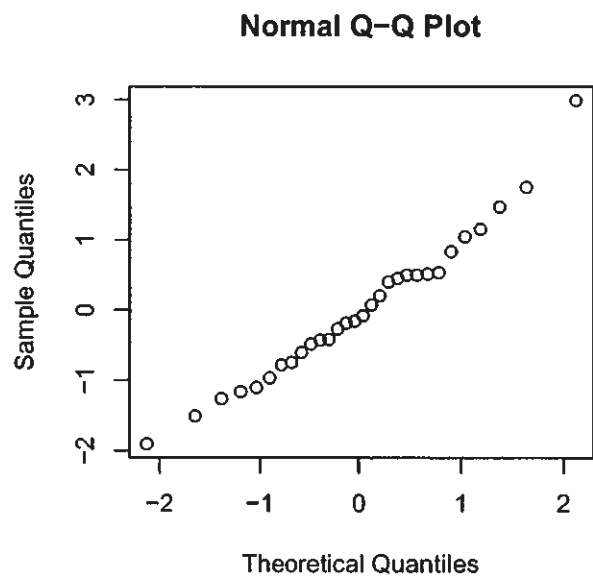
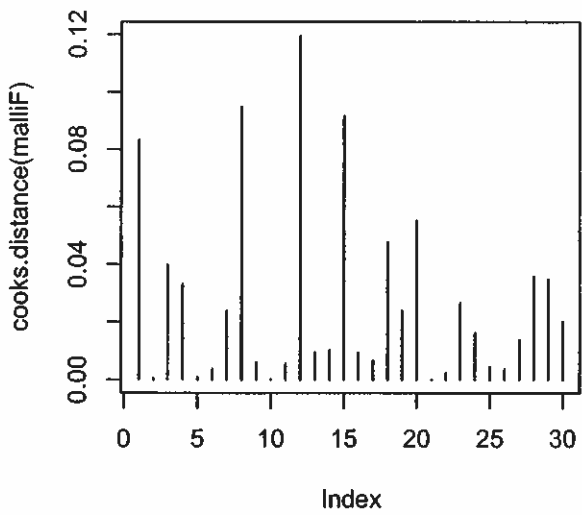
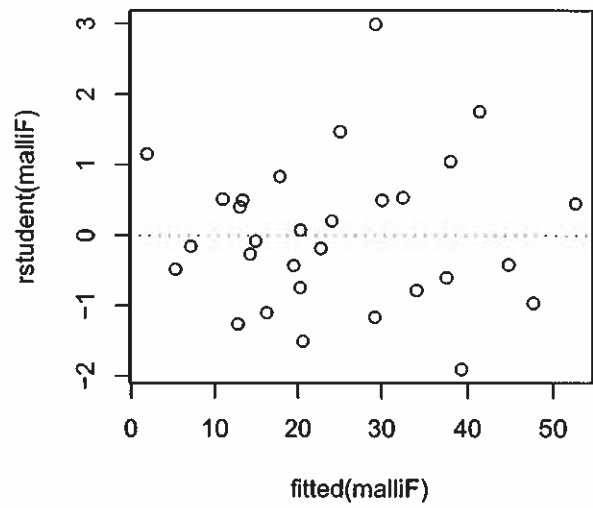
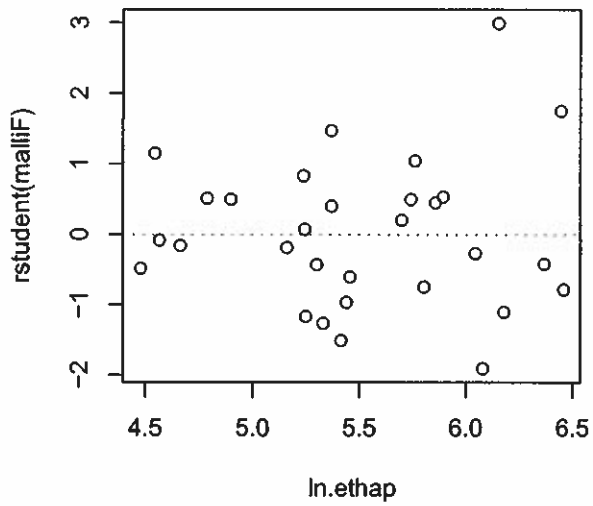
> malliF <- lm (maku~ln.H2S+maitohap)
> summary(malliF)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -27.592      8.982  -3.072  0.00481 **
ln.H2S         3.946      1.136   3.475  0.00174 **
maitohap      19.887      7.959   2.499  0.01885 *

Residual standard error: 9.942 on 27 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.6517,    Adjusted R-squared: 0.6259
F-statistic: 25.26 on 2 and 27 DF,  p-value: 6.551e-07
>
> malliG <- lm (maku~ln.H2S+maitohap+ln.ethap)
> summary(malliG)
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -28.8768    19.7354  -1.463  0.15540
ln.H2S         3.9118     1.2484   3.133  0.00425 **
maitohap      19.6705     8.6291   2.280  0.03108 *
ln.ethap       0.3277     4.4598   0.073  0.94198
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10.13 on 26 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.6518,    Adjusted R-squared: 0.6116
F-statistic: 16.22 on 3 and 26 DF,  p-value: 3.81e-06
>
> vif(malliG)
ln.H2S maitohap ln.ethap
1.992200 1.937912 1.831589
>
> plot(ln.ethap,rstudent(malliF)) ; abline(h=0,lty=3)
> plot(fitted(malliF),rstudent(malliF)) ; abline(h=0,lty=3)
> plot(cooks.distance(malliF),type="h")
> qqnorm(rstudent(malliF))
>

```

KUVIO 1b. Eräitä diagnostisia piirroksia mallista, jossa selittävinä muuttujina ovat $\ln.H2S$ ja maitop.



LIITE 2

```
> y_F
[1] 16.1 16.4 16.7 16.8 17.2 17.2 17.4 17.8
> y_V
[1] 17.0 17.0 17.4 17.5 17.6 17.8 19.1 19.2
> y <- c(y_F,y_V)
> n1 <- length(y_F); n2 <- length(y_V)
> d <- c(matrix(rep(y_V,n1),n2)-t(matrix(rep(y_F,n2),n1)))
> d <- sort(d) ; d
  [1] -0.8 -0.8 -0.4 -0.4 -0.4 -0.3 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2  0.0  0.0  0.1  0.2
 [16]  0.2  0.2  0.2  0.2  0.3  0.3  0.3  0.3  0.4  0.4  0.4  0.6  0.6  0.6  0.6
 [31]  0.6  0.7  0.7  0.8  0.8  0.9  0.9  0.9  1.0  1.0  1.1  1.1  1.2  1.3  1.3
 [46]  1.4  1.4  1.4  1.5  1.7  1.7  1.8  1.9  1.9  2.0  2.0  2.3  2.4  2.4  2.5
 [61]  2.7  2.8  3.0  3.1
> n <- length(y)
> y. <- sort(y) ; y.
  [1] 16.1 16.4 16.7 16.8 17.0 17.0 17.2 17.2 17.4 17.4 17.5 17.6 17.8 17.8 19.1
 [16] 19.2
> apu <- matrix(rep(y.,n),n)
> VV <- (apu+t(apu))/2
> V <- c(VV[row(VV) <= col(VV)])
> V <- sort(V) ; V
  [1] 16.10 16.25 16.40 16.40 16.45 16.55 16.55 16.55 16.60 16.65 16.65 16.70
 [13] 16.70 16.70 16.75 16.75 16.75 16.80 16.80 16.80 16.80 16.85 16.85 16.85
 [25] 16.90 16.90 16.90 16.90 16.95 16.95 16.95 16.95 16.95 17.00 17.00 17.00
 [37] 17.00 17.00 17.00 17.05 17.05 17.10 17.10 17.10 17.10 17.10 17.10 17.10
 [49] 17.10 17.10 17.15 17.15 17.20 17.20 17.20 17.20 17.20 17.20 17.20 17.20
 [61] 17.25 17.25 17.25 17.25 17.30 17.30 17.30 17.30 17.30 17.30 17.30 17.30
 [73] 17.35 17.35 17.40 17.40 17.40 17.40 17.40 17.40 17.40 17.40 17.40 17.45
 [85] 17.45 17.50 17.50 17.50 17.50 17.50 17.50 17.50 17.50 17.55 17.60 17.60
 [97] 17.60 17.60 17.60 17.65 17.65 17.65 17.70 17.70 17.75 17.80 17.80 17.80
 [109] 17.80 17.90 17.95 17.95 18.00 18.05 18.05 18.10 18.10 18.15 18.15 18.20
 [121] 18.20 18.25 18.25 18.30 18.30 18.30 18.35 18.35 18.40 18.45 18.45 18.50
 [133] 18.50 19.10 19.15 19.20
>
```


Kun $t \sim t(f)$, niin $P(t \geq t) = p$.

f \ p	.50	.40	.30	.20	.10	.05	.025	.01	.005	.001
1	0.000	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657	318.309
2	0.000	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.000	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.000	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.000	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.000	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.000	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.000	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.000	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.000	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.000	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.000	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.000	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.000	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.000	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.000	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.000	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.000	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.000	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.000	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.000	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.000	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.000	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.000	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.000	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.000	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.000	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.000	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.000	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.000	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	0.000	0.256	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	0.000	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	0.000	0.255	0.530	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	0.000	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	0.000	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	0.000	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	0.000	0.255	0.529	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	0.000	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	0.000	0.255	0.529	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	0.000	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41	0.000	0.255	0.529	0.850	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42	0.000	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43	0.000	0.255	0.528	0.850	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44	0.000	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45	0.000	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46	0.000	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47	0.000	0.255	0.528	0.849	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48	0.000	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49	0.000	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50	0.000	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.000	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.000	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.000	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.000	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
100	0.000	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
150	0.000	0.254	0.526	0.844	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145
200	0.000	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131
250	0.000	0.254	0.525	0.843	1.285	1.651	1.969	2.341	2.596	3.123
300	0.000	0.254	0.525	0.843	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118
350	0.000	0.254	0.525	0.843	1.284	1.649	1.967	2.337	2.590	3.114
400	0.000	0.254	0.525	0.843	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.111
450	0.000	0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.335	2.587	3.108
500	0.000	0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
600	0.000	0.253	0.525	0.842	1.283	1.647	1.964	2.333	2.584	3.104
700	0.000	0.253	0.525	0.842	1.283	1.647	1.963	2.332	2.583	3.102
800	0.000	0.253	0.525	0.842	1.283	1.647	1.963	2.331	2.582	3.100
900	0.000	0.253	0.525	0.842	1.282	1.647	1.963	2.330	2.581	3.099
1000	0.000	0.253	0.525	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

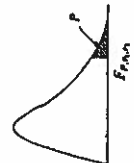


Table A4. Percentage points of the F distribution. The function tabulated is F_{α, v_1, v_2} , the value exceeded with probability α in the F distribution with v_1 degrees of freedom for the numerator and v_2 degrees of freedom for the denominator (the 100 α percentage point). This value for $P = 0.05$ and 0.01 are shown in bold type.

DF for denominator, v_2	DF for numerator, v_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
1	0.05 161.4 0.025 647.8 0.01 4057 0.005 16211	198.5 799.5 5000 20000	215.7 864.2 5403 21615	224.6 899.6 5625 22500	230.2 921.8 5974 23056	234.0 948.2 6364 23437	236.8 967.7 6666 23715	238.9 988.1 7006 23925	243.9 1018 7366 24206	249.1 1048 7666 24426	254.3 1078 7966 24646
2	0.05 18.51 0.025 38.51 0.01 98.50 0.005 198.5	19.00 39.00 99.00 199.0	19.16 39.17 99.17 199.2	19.25 39.25 99.25 199.3	19.30 39.30 99.30 199.3	19.33 39.33 99.33 199.4	19.35 39.37 99.37 199.4	19.37 39.37 99.37 199.4	19.41 39.41 99.41 199.5	19.45 39.45 99.45 199.5	19.50 39.50 99.50 199.5
3	0.05 10.13 0.025 17.44 0.01 34.12 0.005 55.55	9.55 16.04 30.82 49.50	9.28 15.44 29.46 47.47	9.12 15.10 28.72 46.19	9.01 14.88 28.24 45.39	8.94 14.73 27.91 44.84	8.89 14.62 27.67 44.43	8.85 14.54 27.49 44.13	8.74 14.34 27.06 43.39	8.64 14.12 26.60 42.62	8.53 13.90 26.13 41.83
4	0.05 7.71 0.025 12.22 0.01 21.20 0.005 31.33	6.94 10.45 18.00 26.28	6.59 9.98 17.49 25.26	6.39 9.58 16.99 24.26	6.26 9.36 16.52 23.15	6.16 9.20 16.07 22.46	6.09 9.07 15.62 21.97	6.04 8.91 15.21 21.62	5.91 8.75 14.80 21.35	5.77 8.51 14.37 21.03	5.63 8.26 13.93 20.72

Continued on p. 732

Table A4 (continued)

DF for denominator, v_2	DF for numerator, v_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
12	0.05 4.78 0.025 5.57 0.01 9.33 0.005 11.75	3.89 4.18 6.93 8.51	3.49 3.59 5.95 7.23	3.26 3.25 5.41 6.52	3.11 3.03 5.06 6.07	3.11 3.03 4.82 5.76	3.00 2.87 4.64 5.52	2.91 2.75 4.44 5.22	2.85 2.65 4.27 5.05	2.69 2.41 4.16 4.91	2.51 2.14 3.78 4.43
14	0.05 4.65 0.025 5.30 0.01 8.86 0.005 11.06	3.74 4.06 6.51 7.92	3.34 3.46 5.56 6.68	3.11 3.09 5.04 6.00	2.96 2.89 4.69 5.56	2.96 2.89 4.46 5.36	2.85 2.74 4.28 5.16	2.76 2.66 4.14 4.91	2.70 2.59 4.03 4.86	2.53 2.25 3.80 4.43	
16	0.05 4.49 0.025 5.12 0.01 8.53 0.005 10.58	3.63 4.09 6.23 7.51	3.24 3.48 5.29 6.30	3.01 2.93 4.77 5.64	2.85 2.85 4.44 5.21	2.85 2.74 4.44 5.21	2.74 2.66 4.28 5.16	2.66 2.58 4.14 4.91	2.66 2.59 4.03 4.86	2.42 2.14 3.40 4.03	
18	0.05 4.41 0.025 5.08 0.01 8.29 0.005 10.22	3.55 4.06 6.01 7.21	3.16 3.46 5.09 6.03	2.93 2.87 4.63 5.37	2.77 2.77 4.44 5.16	2.77 2.66 4.28 5.16	2.66 2.58 4.14 4.91	2.58 2.51 4.03 4.86	2.58 2.48 3.80 4.64	2.34 2.06 3.30 3.96	
20	0.05 4.35 0.025 5.07 0.01 8.10 0.005 9.94	3.49 4.06 5.85 6.99	3.10 3.36 4.94 5.82	2.87 2.81 4.43 5.17	2.71 2.71 4.16 4.76	2.71 2.60 3.97 4.76	2.60 2.51 3.70 4.47	2.48 2.41 3.56 4.26	2.48 2.38 3.40 4.09	2.28 2.00 2.86 3.22	
30	0.05 4.17 0.025 4.81 0.01 7.66 0.005 9.18	3.32 3.59 5.39 6.35	2.91 3.25 4.82 5.34	2.69 2.69 4.42 4.62	2.53 2.53 4.16 4.33	2.53 2.42 3.92 4.33	2.42 2.34 3.74 4.16	2.33 2.25 3.58 3.74	2.27 2.17 3.38 3.58	2.09 1.89 2.73 3.18	
40	0.05 4.08 0.025 4.72 0.01 7.31 0.005 8.83	3.23 3.52 5.18 6.07	2.84 3.18 4.83 5.37	2.61 2.61 4.37 4.57	2.45 2.45 4.14 4.31	2.45 2.34 3.99 4.31	2.34 2.25 3.71 4.14	2.25 2.17 3.51 3.71	2.17 2.09 3.35 3.55	1.99 1.79 2.50 2.95	
60	0.05 4.00 0.025 4.65 0.01 7.08 0.005 8.49	3.15 3.43 4.98 5.79	2.76 3.10 4.73 5.26	2.63 2.63 4.34 4.54	2.48 2.48 4.14 4.31	2.48 2.37 3.99 4.31	2.37 2.28 3.71 4.14	2.28 2.20 3.49 3.71	2.20 2.11 3.29 3.49	1.99 1.79 2.50 2.95	
120	0.05 3.92 0.025 4.57 0.01 6.85 0.005 8.18	3.07 3.35 4.83 5.54	2.68 3.02 4.68 5.21	2.68 2.68 4.32 4.51	2.53 2.53 4.14 4.31	2.53 2.42 3.99 4.31	2.42 2.33 3.71 4.14	2.33 2.25 3.51 3.71	2.25 2.17 3.29 3.49	2.09 1.89 2.50 2.95	
∞	0.05 3.84 0.025 4.49 0.01 6.63 0.005 7.88	3.00 3.28 4.73 5.30	2.60 2.94 4.60 5.13	2.57 2.57 4.31 4.50	2.41 2.41 4.14 4.31	2.41 2.30 3.97 4.31	2.30 2.21 3.70 4.14	2.21 2.11 3.49 3.70	2.11 2.01 3.29 3.49	1.90 1.70 2.40 2.85	

Condensed from Table 18 of Pearson and Hartley (1966) by permission of the authors and publishers. For values of v_1 and v_2 not given, interpolation is approximately linear in the reciprocals of v_1 and v_2 .