DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Loppukoe 13.02.2012

1. Osoita, että kaikilla $\nu > 0$ ja $x \neq 0$ Besselin funktioille $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ ovat voimassa kaavat

   a) $\frac{d}{dx}\Big[x^{-\nu} J_\nu(x)\Big] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$, b) $\frac{d}{dx}\Big[x^{\nu} J_\nu(x)\Big] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$.

   c) Laske integraalit

$$\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\,dx.$$

2. Osoita, että Hermiten polynomeille $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ pätee

   a) $H_n(x) = 2x\,H_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)$,
   b) $H'_n(x) = 2n\,H_{n-1}(x)$,
   c) $H''_n(x) - 2x\,H'_n(x) + 2n\,H_n(x) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$

3. Kehitä funktio $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, Fourier-kosinisarjaksi. Laske tämän Fourier-sarjan avulla sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ arvo.

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla integrodifferentiaaliyhtälö

$$y'(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t-x)y(x)\,dx, \qquad y(0) = 1.$$

   Vihje: $\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$ ja $\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$.

5. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x, \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

Merkitse koepaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.