**DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II**

**Loppukoe 17.10.2011**

1. Osoita, että kaikilla realiluvuilla $p$ ja $x > 0$ Besselin funktioille $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$ ovat voimassa kaavat

   a) $\frac{d}{dx}\Big[x^{-p}J_p(x)\Big] = -x^{-p}J_{p+1}(x)$, b) $\frac{d}{dx}\Big[x^{p}J_p(x)\Big] = x^{p}J_{p-1}(x)$.

2. a) Osoita, että Hermiten polynomeille $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ pätee

   $$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2} \qquad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R} \text{ ja } z \in \mathbb{C}.$$

   b) Osoita a)-kohdan avulla, että

   $$H_0'(x) = 0, \qquad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

3. Kehitä funktio $f(x) = |\cos x|$, $-\pi < x \le \pi$, Fourier-sarjaksi. Osoita tämän Fourier-sarjan avulla, että

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla integraaliyhtälö

   $$y(t) = t^2 + \int_o^t \sin(t-u)y(u)\,du.$$

   Opastus: $L(\sin at) = \frac{a}{a^2+s^2}$.

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin 3x - \sin 6x,\ 0 < x < \pi, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 9\sin 3x,\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

**Merkitse koepaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.**