

# DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

## Loppukoe 18.10.2010

1. Osoita, että kaikilla  $\nu > 0$  ja  $x \neq 0$  Besselin funktioille

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad \text{ovat voimassa kaavat}$$

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \left[ x^{-\nu} J_\nu(x) \right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad \text{b) } \frac{d}{dx} \left[ x^\nu J_\nu(x) \right] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

c) Osoita, että

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)], \quad \text{kun } n = 1, 2, \dots$$

2. Osoita, että Hermiten polynomeille  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  pätee

$$\text{a) } H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x),$$

$$\text{b) } H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x),$$

$$\text{c) } H''_n(x) - 2x H'_n(x) + 2n H_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Kehitä funktio  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2$ , Fourier-kosinisarjaksi ja laske sen avulla summa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla Volterrann integraaliyhtälö

$$y(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-x)y(x) dx.$$

$$\text{Vihje: } \mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ja } \mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 5 \sin 4\pi x - 8 \sin 8\pi x, & 0 < x < 3. \end{cases}$$

Merkitse koepaperiin nimi, henkilötunnus, koulutusohjelma ja tenttittävä opintojakso.