

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Loppukoe 21.05.2012

1. Osoita, että Besselin funktioille

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

on voimassa

a) $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

b) $\int x^n J_{n-1}(\alpha x) dx = \frac{x^n}{\alpha} J_n(\alpha x) + C, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

missä $\alpha \neq 0$ on vakio ja C integroimisvakio.

2. Osoita, että Hermiten polynomeille $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ pätee

a) $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x),$

b) $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$

c) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \dots$

3. Kehitä funktio $f(x) = |x|$, $-2 \leq x < 2$, Fourier-sarjaksi. Osoita tämän Fourier-sarjan avulla, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla Volterran integraaliyhtälö

$$y(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-w)y(w) dw.$$

Vihje: $\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ ja $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 4 \sin 2x + 12 \sin 5x, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Merkitse koepaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.