DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Loppukoe 23.05.2011

1. a) Osoita, että Besselin funktioille

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

on voimassa

$$\frac{d}{dx}\big(x^n J_n(x)\big) = x^n J_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

b) Laske integraalit

$$\int_0^1 x^3 J_0(x)\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int J_1(\sqrt[3]{x})\, dx.$$

2. Osoita, että Hermiten polynomeille $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ pätee

a) $\quad H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)$,

b) $\quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$,

c) $\quad H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad$ kun $n = 1, 2, 3, \cdots$.

3. Kehitä funktio $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, Fourier-kosinisarjaksi. Laske tämän Fourier-sarjan avulla sarjan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ arvo.

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla integrodifferentiaaliyhtälö

$$y'(t) = 1 - \int_0^t e^{-2v} y(t - v)\, dv, \qquad y(0) = 1.$$

Vihje: $\mathcal{L}(e^{ct}t^n) = \dfrac{n!}{(s-c)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 2\sin 2x + 6\sin 5x, \quad 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Merkitse koepaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.