

# DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Loppukoe 24.05.2010

1. Osoita, että Besselin funktioille

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

on voimassa

a)  $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

b)  $\int x^n J_{n-1}(\alpha x) dx = \frac{x^n}{\alpha} J_n(\alpha x) + C, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

missä  $\alpha \neq 0$  on vakio ja  $C$  integroimisvakio.

2. Osoita, että Hermiten polynomeille  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$  pätee

a)  $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x),$

b)  $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$

c)  $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \dots$

3. Kehitä funktio  $f(x) = |\cos x|$ ,  $-\pi < x \leq \pi$ , Fourier-sarjaksi. Osoita tämän Fourier-sarjan avulla, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla integrodifferentiaaliyhtälö

$$y'(t) = 1 - \int_0^t e^{-2s} y(t-s) ds, \quad y(0) = 1.$$

Vihje:  $\mathcal{L}(e^{ct} f(t)) = F(s-c)$ , missä  $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ .

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 4 \sin 2x + 12 \sin 5x, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

**Merkitse koepaperiin nimi, henkilötunnus, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.**