DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II

Loppukoe 31.01.2011

1. Osoita, että kaikilla $\nu > 0$ ja $x \neq 0$ Besselin funktioille
$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ ovat voimassa kaavat

   a) $\frac{d}{dx}\Big[x^{-\nu} J_\nu(x)\Big] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$ b) $\frac{d}{dx}\Big[x^{\nu} J_\nu(x)\Big] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$

   ja

   c) $\int x^n J_{n-1}(\alpha x)\, dx = \frac{x^n}{\alpha} J_n(\alpha x) + C, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$

   missä $\alpha \neq 0$ on vakio ja C integroimisvakio.

2. Osoita, että Hermiten polynomeille $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ pätee

   a) $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x),$
   b) $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$
   c) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0,$ kun $n = 1, 2, 3, \cdots.$

3. Kehitä funktio $f(x) = |\sin x|$, $-\pi < x \leq \pi$, Fourier-sarjaksi. Osoita tämän Fourier-sarjan avulla, että
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnosten avulla integraaliyhtälö
$$y(t) + \int_o^t e^{t-x} y(x)\, dx = 2t.$$
Vihje: $\mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots.$

5. Ratkaise reuna-arvoprobleema
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2x + 2\sin 4x, \quad 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Merkitse koepaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja tentittävä opintojakso.