DISKREETTI MATEMATIIKKA

Loppukoe 9.1.2006

1. a) Olkoot A, B ja C joukkoja. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$$

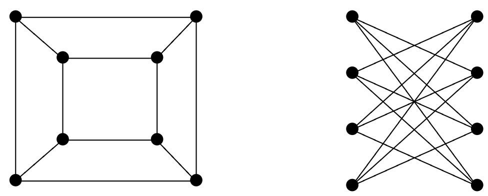
   b) Olkoot $f(n) = n^3 + 100n$ ja $g(n) = n^3$ funktioita $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Osoita (määritelmään nojautuen), että $f \in \mathcal{O}(g)$.

2. a) Kuinka moni kokonaisluvuista $1, 2, \ldots, 1000$ ei ole jaollinen millään luvuista 2, 3 ja 7?

   b) Arpajaisissa arvotaan 4 samanlaista palkintoa 6 osallistujan kesken. Millä todennäköisyydellä kaikki palkinnot menevät eri henkilöille?

3. Olkoon $L \subseteq \{a, b\}^*$ kieli, jossa on ne sanat, joissa ei ole kahta a:ta peräkkäin ja joissa jokaisessa b:n esiintymässä on vähintään kaksi b:tä peräkkäin. Huomaa, että $\varepsilon \in L$. Konstruoi kielen L määräävä säännöllinen lauseke ja sellainen deterministinen automaatti $\mathcal{A}$ ja kielioppi $\mathcal{G}$, että $L = L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{G})$.

4. Määrittele, milloin suuntaamattomat verkot $G_1 = (V_1, E_1, \alpha_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2, \alpha_2)$ ovat isomorfiset. Ovatko seuraavat verkot isomorfiset?



5. Määrittele joukon X relaation R transitiivinen sulkeuma $t(R)$. Tiedetään, että $t(R) = \cup_{k=1}^{\infty} R^k$. Osoita, että jos $|X| = n \in \mathbb{Z}_+$, niin $t(R) = \cup_{k=1}^{n} R^k$.