# Ekonometrian tilastolliset menetelmät
# Tenttikysymykset

2012, Maaliskuu 12

Tehtävät 1-5 kuuluvat aineopintojen tenttiin ja tehtävät 1-6 kuuluvat syventävien opintojen tenttiin. (Questions 1-5 belong to the examination at the level of aineopinnot and questions 1-6 belong to the examination at the level of syventävät opinnot.)

1. Tarkastellaan lineaarista mallia

$$Y = X'\beta + \epsilon,$$

missä $X$ on $K \times 1$-satunnaisvektori, $\beta$ on $K \times 1$-vektori ja $Y, \epsilon \in \mathbf{R}$ ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Olkoon $EX\epsilon = 0$ ja olkoon $EXX'$ kääntyvä matriisi ($\text{rank}(EXX') = K$). Osoita, että

$$\beta = (EXX')^{-1}EXY.$$

2. Olkoon $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_K)'$ $K \times 1$-vektori. Tarkastellaan rajoituksia

   (a) $\beta_2 = 0$,

   (b) $\beta_2 = \cdots = \beta_K = 0$,

   (c) $\beta_2 = \beta_3$,

   (d) $\beta_1 = 0$, $\beta_3 + \beta_4 = 2$.

   Määritä matriisi $R$ ja vektori $q$ kussakin tapauksessa (a)-(d) siten, että rajoitus voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$R\beta = q,$$

missä $R$ on $J \times K$-matriisi, $1 \leq J \leq K - 1$ ja $q$ on $J \times 1$-vektori.

3. Olkoon

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{t2} + \cdots + \beta_K^{(1)} X_{tK} + \epsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, T_0$$

ja

$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{t2} + \cdots + \beta_K^{(2)} X_{tK} + \epsilon_t, \qquad t = T_0 + 1, \ldots, T.$$

Selitä miten nollahypoteesia

$$H_0 : \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_K^{(1)} = \beta_K^{(2)}$$

voidaan testata $F$-testillä käyttäen indikaattorimuuttujia (dummy variables). (Chown testi)

4. Olkoon

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-satunnaismatriisi ja $\beta$ on $K \times 1$-vektori. Oletetaan, että $E(\epsilon \mid \mathcal{X}) = 0$ ja $E(\epsilon\epsilon' \mid \mathcal{X}) = \Sigma$. Olkoon

$$b = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}.$$

Osoita, että

$$\mathrm{Var}(b \mid \mathcal{X}) = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\Sigma\mathcal{X}(\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}.$$

5. Olkoon

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-satunnaismatriisi ja $\beta$ on $K \times 1$ vektori. Olkoon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ i.i.d., $E(X_i\epsilon_i) = 0$ ja olkoon $E(X_iX_i')$ kääntyvä matriisi. Osoita, että

$$b \xrightarrow{p} \beta,$$

kun $n \to \infty$, missä

$$b = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}$$

on pienimmän neliösumman estimaattori.

HUOM. Tehtävä 6 kuuluu vain syventävien opintojen tenttiin. (Question 6 belongs only to the examination at the level of syventävät opinnot.)

6. Olkoon

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-satunnaismatriisi ja $\beta$ on $K \times 1$-vektori. Olkoon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ i.i.d., $E(\epsilon \mid \mathcal{X}) = 0$ ja $E(\epsilon\epsilon' \mid \mathcal{X}) = \sigma^2 I_n$.

Osoita, että

$$\sqrt{n}\,(b - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2 Q^{-1}\right),$$

kun $n \to \infty$, missä

$$b = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}$$

on pienimmän neliösumman estimaattori ja $Q = EX_iX_i'$.