Ekonometrian tilastolliset menetelmät
Tenttikysymykset

2012, Huhtikuu 16

Tehtävät 1-5 kuuluvat aineopintojen tenttiin ja tehtävät 1-6 kuuluvat syventävien opintojen tenttiin.

1. Määrittele normaalijakauman avulla seuraavat jakaumat: (a) χ^2-jakauma vapausastein n, (b) t-jakauma vapausastein n, (c) F-jakauma vapausastein n ja m.

2. Olkoon
$$Y = X'\beta + \epsilon,$$
missä Y ja ϵ ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia, X on $K \times 1$ satunnaisvektori ja β on $K \times 1$ vektori. Olkoon Z $K \times 1$ satunnaisvektori. Oletetaan, että $EZ\epsilon = 0$ ja EZX' on kääntyvä matriisi. Osoita, että
$$\beta = (EZX')^{-1}EZY.$$

3. Olkoon
$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$
missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-matriisi ja β on $K \times 1$-vektori. Olkoon $\mathcal{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$ $n \times L$ instrumenttimuuttujien matriisi, missä $L \geq K$.

   Olkoon β:n estimaattori
$$b_{IV} = (\hat{\mathcal{X}}'\hat{\mathcal{X}})^{-1}\hat{\mathcal{X}}'\mathcal{Y},$$
missä
$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{X}.$$
Osoita, että
$$b_{IV} = \left[\mathcal{X}'\mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{X}\right]^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Z}(\mathcal{Z}'\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{Y}.$$

4. Olkoon

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

missä Y_i, X_i ja ϵ_i ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Pienimmän neliösumman estimaattorit ovat

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \qquad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X},$$

missä $s_{xy} = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$, $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i$ ja $s_x^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Osoita, että jos (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, ovat i.i.d, $EX_i^2 < \infty$ ja $EY_i^2 < \infty$, niin

$$\hat{\beta} \xrightarrow{p} \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)},$$

ja

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} EY - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} EX,$$

kun $n \to \infty$.

5. Olkoon

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-matriisi ja β on $K \times 1$-vektori. Olkoon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ i.i.d., $E(\epsilon \,|\, \mathcal{X}) = 0$ ja $E(\epsilon\epsilon' \,|\, \mathcal{X}) = \sigma^2 I$.

Oletetaan tunnetuksi, että

$$\sqrt{n}\,(b - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2 Q^{-1}\right),$$

kun $n \to \infty$, missä

$$b = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y}$$

ja $Q = EX_iX_i'$. Olkoon

$$R\beta = q,$$

missä R on $J \times K$-matriisi ja q on J-vektori, missä $1 \leq J \leq K - 1$.

Osoita, että

$$F \xrightarrow{d} \chi^2(J),$$

missä

$$F = (Rb - q)'(s^2 R(\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}R')^{-1}(Rb - q)$$

ja

$$s^2 = \frac{1}{n - K}\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i'b)^2.$$

HUOM. Tehtävä 6 kuuluu vain syventävien opintojen tenttiin.

6. Olkoon

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \epsilon,$$

missä $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)'$ ovat $n \times 1$-satunnaisvektoreita, $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ on $n \times K$-matriisi ja β on $K \times 1$-vektori. Olkoon $\mathcal{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$ $n \times K$ instrumenttimuuttujien matriisi.

Olkoot $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots, (X_n, Y_n, Z_n)$ i.i.d, $E(Z_i X_i') \stackrel{def}{=} Q_{zx}$ ja $E(X_i Z_i') \stackrel{def}{=} Q_{xz}$ kääntyviä, $E(\epsilon \,|\, \mathcal{Z}) = 0$ ja $E(\epsilon\epsilon' \,|\, \mathcal{Z}) = \sigma^2 I$. Merkitään lisäksi $Q_{zz} = E Z_i Z_i'$.

Olkoon β:n estimaattori

$$b_{IV}^0 = (\mathcal{Z}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{Z}'\mathcal{Y}.$$

Osoita, että

$$\sqrt{n}\,(b_{IV}^0 - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2 Q_{zx}^{-1} Q_{zz} Q_{xz}^{-1}\right),$$

kun $n \to \infty$.