

Euklidinen topologia

Tentti 20.6.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

2. Määritä tarkasti perustellen joukon

$$A = [-1, 1[\times]-\infty, -1[\cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

reuna.

3. a) Määrittele joukon sisäpiste ja avoin joukko.

b) Suppeneeko avaruuden \mathbb{R}^3 jono $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}, \frac{\sin n}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
Perustelee vastauksesi tarkasti.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Voidaanko f määritellä pisteessä $(0, 0)$ sillä tavalla, että siitä tulisi jatkuva pisteessä $(0, 0)$?

5. Olkoon $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{jos } x = \lambda y \text{ jollekin } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $\|x - y\|$ on pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^2$ etäisyys euklidisessä metriikassa. Osoita, että d on metriikka joukossa \mathbb{R}^2 . Piirrä $\overline{B}_d((1, 0), \frac{3}{2})$. Metristä avaruutta (\mathbb{R}^2, d) kutsutaan Ranskan rautatieavaruudeksi, koska kaikki junareitit kulkevat Pariisiin kautta.